Higher Dimensional Automata

Zoltan Esik, Zoltan L. Nemeth

23.05.2007

Überblick

Motivation

Biposets

erkennbare und reguläre Sprachen
- erkennbare Sprachen
- reguläre Sprachen

rationale Sprachen
- BRat und GRat
- HRat und VRat

Motivation

Es gibt bereits Arbeiten zu sequentiell-parallelen Biposets.
Bei diesen gibt es eine assoziative Operation und eine assoziative und kommutative Operation.
Diese Strukturen nutzt man um nebenläufige Prozesse zu modellieren.
Dabei nutzt man die kommutative Operation für echt nebenläufige Prozesse, deren Ausführungsreihenfolge man vertauschen kann.

Im Paper möchte man aber allgemeinere Resultate vorstellen, indem man die Kommutativität streicht und nur über assoziative Operationen redet.

Biposet

Σ endliches Alphabet.

Ein **Biposet** ist ein 4-Tupel $P = (P, <_1, <_2, \lambda)$ mit:

- P ist endliche nichtleere Menge
- $<_1$ und $<_2$ sind irreflexive teilweise Ordnungen auf P
- $\lambda : P \to \Sigma$ ist Beschriftungsfunktion

Operationen auf Biposets

Seien P und Q Biposets.

$P \circ_i Q = (P \cup Q, <_1^{P \circ_i Q}, <_2^{P \circ_i Q}, \lambda_P \cup \lambda_Q)$ für $i \in \{1, 2\}$ wobei

$$<_j^{P \circ_i Q} = \begin{cases} <_j^P \cup <_j^Q & \text{wenn } j \neq i \\ <_i^P \cup <_i^Q \cup (P \times Q) & \text{wenn } j = i \end{cases}$$

Operationen auf Biposets

Seien P und Q Biposets.

$P \circ_i Q = (P \cup Q, <_1^{P \circ_i Q}, <_2^{P \circ_i Q}, \lambda_P \cup \lambda_Q)$ für $i \in \{1, 2\}$ wobei

$$<_j^{P \circ_i Q} = \begin{cases} <_j^P \cup <_j^Q & \text{wenn } j \neq i \\ <_i^P \cup <_i^Q \cup (P \times Q) & \text{wenn } j = i \end{cases}$$

$\circ_1$ ist das horizontale Produkt $\bullet$
$\circ_2$ ist das vertikale Produkt $\circ$

Assoziativität von $\bullet$ und $\circ$

- $\bullet$ ist assoziativ:

$$
\begin{aligned}
(P \bullet Q) \bullet R &= (P \cup Q, \quad <_1^{P \bullet Q}, \quad <_2^{P \bullet Q}, \quad \lambda_P \cup \lambda_Q) \bullet R \\
&= (P \cup Q, \quad <_1^P \cup <_1^Q \cup (P \times Q), \quad <_2^P \cup <_2^Q, \quad \lambda_P \cup \lambda_Q) \bullet R \\
&= (P \cup Q \cup R, \quad <_1^P \cup <_1^Q \cup (P \times Q) \cup <_1^R \cup ((P \cup Q) \times R), \\
&\qquad\qquad <_2^P \cup <_2^Q \cup <_2^R, \quad \lambda_P \cup \lambda_Q \cup \lambda_R) \\
&= (P \cup Q \cup R, \quad <_1^P \cup <_1^Q \cup (P \times Q) \cup <_1^R \cup (P \times R) \cup (Q \times R), \\
&\qquad\qquad <_2^P \cup <_2^Q \cup <_2^R, \quad \lambda_P \cup \lambda_Q \cup \lambda_R) \\
&= (P \cup Q \cup R, \quad <_1^P \cup <_1^Q \cup (P \times (Q \cup R)) \cup <_1^R \cup (Q \times R), \\
&\qquad\qquad <_2^P \cup <_2^Q \cup <_2^R, \quad \lambda_P \cup \lambda_Q \cup \lambda_R) \\
&= P \bullet (Q \cup R, \quad <_1^Q \cup <_1^R \cup (Q \times R), \quad <_2^Q \cup <_2^R, \quad \lambda_Q \cup \lambda_R) \\
&= P \bullet (Q \cup R, \quad <_1^{Q \bullet R}, \quad <_2^{Q \bullet R}, \quad \lambda_Q \cup \lambda_R) \\
&= P \bullet (Q \bullet R)
\end{aligned}
$$

$SPB(\Sigma)$

$a \in \Sigma$ mit 1-elementigem Biposet $a = (\{x\}, \emptyset, \emptyset, \lambda_a)$ identifiziert.

Dabei ist $\lambda_a : \{x\} \longrightarrow \Sigma$ mit $\lambda_a(x) = a \in \Sigma$.

$SPB(\Sigma)$

$a \in \Sigma$ mit 1-elementigem Biposet $a = (\{x\}, \emptyset, \emptyset, \lambda_a)$ identifiziert.

Dabei ist $\lambda_a : \{x\} \longrightarrow \Sigma$ mit $\lambda_a(x) = a \in \Sigma$.

$SPB(\Sigma)$ ist die kleinste Menge, die diese Biposets enthält und unter $\bullet$ und $\circ$ abgeschlossen ist.

Beispiel

Seien $a = (\{x\}, \emptyset, \emptyset, \lambda_a)$ und $b = (\{y\}, \emptyset, \emptyset, \lambda_b)$

Es gilt:

1. $a, b \in SPB(\Sigma)$
2. $a \bullet b = (\{x, y\}, \{(x, y)\}, \emptyset, \lambda_a \cup \lambda_b) \in SPB(\Sigma)$
3. $a \circ b = (\{x, y\}, \emptyset, \{(x, y)\}, \lambda_a \cup \lambda_b) \in SPB(\Sigma)$

Beispiel

Seien $a = (\{x\}, \emptyset, \emptyset, \lambda_a)$ und $b = (\{y\}, \emptyset, \emptyset, \lambda_b)$

Es gilt:

1. $a, b \in SPB(\Sigma)$
2. $a \bullet b = (\{x, y\}, \{(x, y)\}, \emptyset, \lambda_a \cup \lambda_b) \in SPB(\Sigma)$
3. $a \circ b = (\{x, y\}, \emptyset, \{(x, y)\}, \lambda_a \cup \lambda_b) \in SPB(\Sigma)$
4. $(a \bullet b) \circ a = (\{x, y, z\}, \{(x, y)\}, \{(x, z), (y, z)\}, \lambda) \in SPB(\Sigma)$, mit $\lambda(x) = \lambda(z) = a$, $\lambda(y) = b$

Charakterisierung von $SPB(\Sigma)$

Theorem

$P \in SPB(\Sigma)$, wenn gilt:

(i) $\forall u, v \in P$ *mit* $u \neq v$ $\exists! i \in \{1, 2\}$, *so dass* $u <_i v$ *oder* $v <_i u$
(ii) $(P, <_1)$ *und* $(P, <_2)$ *sind N-frei*

Biposets

$SPB(\Sigma)$ ist die von Σ frei erzeugte Algebra mit 2 assoziativen Operationen.

Biposets

$SPB(\Sigma)$ ist die von Σ frei erzeugte Algebra mit 2 assoziativen Operationen.

Konsequenz: alle Biposets aus $SPB(\Sigma)$ werden bzgl. $\bullet$ und $\circ$ eindeutig maximal zerlegt

$P = P_1 \bullet \cdots \bullet P_n$ mit P_i horizontal irreduzibel $\forall i$ ist eine eindeutige maximale horizontale Dekomposition von P.

analog für $\circ$

Überblick

Rec

Eine **Bisemigruppe** $B = (B, \bullet, \circ)$ ist eine algebraische Struktur mit 2 assoziativen binären Operationen $\bullet$ und $\circ$.

$L \subseteq SPB(\Sigma)$ ist **erkennbar**, wenn eine endliche Bisemigruppe B und ein Homomorphismus $h : SPB(\Sigma) \longrightarrow B$ existieren, so dass für $F \subseteq B$ gilt: $L = h^{-1}(F)$.

Rec

Eine **Bisemigruppe** $B = (B, \bullet, \circ)$ ist eine algebraische Struktur mit 2 assoziativen binären Operationen $\bullet$ und $\circ$.

$L \subseteq SPB(\Sigma)$ ist **erkennbar**, wenn eine endliche Bisemigruppe B und ein Homomorphismus $h : SPB(\Sigma) \longrightarrow B$ existieren, so dass für $F \subseteq B$ gilt: $L = h^{-1}(F)$.

Rec ist die Menge der erkennbaren Biposet-Sprachen.

Rec

Theorem

Rec ist abgeschlossen unter den booleschen Operationen und inversen Homomorphismen.

Rec

Theorem

Rec ist abgeschlossen unter den booleschen Operationen und inversen Homomorphismen.

Beweisidee: wie für formale Sprachen.

Klammerautomaten

Ein (nichtdeterministischer) **Klammerautomat** ist ein 9-Tupel $S = (S, H, V, \Sigma, \Omega, \delta, \gamma, I, F)$ mit:

- S ist endliche Menge von Zuständen mit $S = H \dot{\cup} V$
- H ist Menge von horizontalen Zuständen
- V ist Menge von vertikalen Zuständen
- $\Omega = \{(_k,)_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ ist endliche Menge von Klammern
- $\delta \subseteq (H \times \Sigma \times H) \cup (V \times \Sigma \times V)$ ist die Beschriftungs-Transitionsrelation
- $\gamma \subseteq (H \times \Omega \times V) \cup (V \times \Omega \times H)$ ist die Klammer-Transitionsrelation
- $I, F \subseteq S$ sind die Initial- bzw. Finalzustände

Klammerautomaten

Sei $P \in SPB(\Sigma)$ und seien $p, q \in S$.
$[p, P, q]_S$ bedeutet, dass ein Lauf für P von p nach q in S existiert.

Klammerautomaten

Sei $P \in SPB(\Sigma)$ und seien $p, q \in S$.
$[p, P, q]_S$ bedeutet, dass ein Lauf für P von p nach q in S existiert.

$[p, P, q]_S$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt wird:

- (Base) $P = a \in \Sigma$ und $(p, a, q) \in \delta$

Klammerautomaten

Sei $P \in SPB(\Sigma)$ und seien $p, q \in S$.
$[p, P, q]_S$ bedeutet, dass ein Lauf für P von p nach q in S existiert.

$[p, P, q]_S$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt wird:

- (Base) $P = a \in \Sigma$ und $(p, a, q) \in \delta$
- (HH) $p, q \in H$ und $P = P_1 \bullet \cdots \bullet P_n$ und $\exists r_0, \cdots, r_n \in H$ mit $r_0 = p, r_n = q$ und $[r_{i-1}, P_i, r_i]_S$

Klammerautomaten

Sei $P \in SPB(\Sigma)$ und seien $p, q \in S$.
$[p, P, q]_S$ bedeutet, dass ein Lauf für P von p nach q in S existiert.

$[p, P, q]_S$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt wird:

- (Base) $P = a \in \Sigma$ und $(p, a, q) \in \delta$
- (HH) $p, q \in H$ und $P = P_1 \bullet \cdots \bullet P_n$ und $\exists r_0, \cdots, r_n \in H$ mit $r_0 = p, r_n = q$ und $[r_{i-1}, P_i, r_i]_S$
- (VV) $p, q \in V$ und $P = P_1 \circ \cdots \circ P_n$ und $\exists r_0, \cdots, r_n \in V$ mit $r_0 = p, r_n = q$ und $[r_{i-1}, P_i, r_i]_S$

Klammerautomaten

Sei $P \in SPB(\Sigma)$ und seien $p, q \in S$.
$[p, P, q]_S$ bedeutet, dass ein Lauf für P von p nach q in S existiert.

$[p, P, q]_S$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt wird:

- (Base) $P = a \in \Sigma$ und $(p, a, q) \in \delta$
- (HH) $p, q \in H$ und $P = P_1 \bullet \cdots \bullet P_n$ und $\exists r_0, \cdots, r_n \in H$ mit $r_0 = p, r_n = q$ und $[r_{i-1}, P_i, r_i]_S$
- (VV) $p, q \in V$ und $P = P_1 \circ \cdots \circ P_n$ und $\exists r_0, \cdots, r_n \in V$ mit $r_0 = p, r_n = q$ und $[r_{i-1}, P_i, r_i]_S$
- (HV) $p, q \in H$ und $P = P_1 \circ \cdots \circ P_n$ und $\exists (_k,)_k \in \Omega, p', q' \in V$ und $(p, (_k, p'), (q',)_k, q) \in \gamma$, so dass $[p', P, q']_S$

Klammerautomaten

Sei $P \in SPB(\Sigma)$ und seien $p, q \in S$.
$[p, P, q]_S$ bedeutet, dass ein Lauf für P von p nach q in S existiert.

$[p, P, q]_S$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt wird:

- (Base) $P = a \in \Sigma$ und $(p, a, q) \in \delta$
- (HH) $p, q \in H$ und $P = P_1 \bullet \cdots \bullet P_n$ und $\exists r_0, \cdots, r_n \in H$ mit $r_0 = p, r_n = q$ und $[r_{i-1}, P_i, r_i]_S$
- (VV) $p, q \in V$ und $P = P_1 \circ \cdots \circ P_n$ und $\exists r_0, \cdots, r_n \in V$ mit $r_0 = p, r_n = q$ und $[r_{i-1}, P_i, r_i]_S$
- (HV) $p, q \in H$ und $P = P_1 \circ \cdots \circ P_n$ und $\exists (_k,)_k \in \Omega, p', q' \in V$ und $(p, (_k, p'), (q',)_k, q) \in \gamma$, so dass $[p', P, q']_S$
- (VH) $p, q \in V$ und $P = P_1 \bullet \cdots \bullet P_n$ und $\exists (_k,)_k \in \Omega, p', q' \in H$ und $(p, (_k, p'), (q',)_k, q) \in \gamma$, so dass $[p', P, q']_S$

Reg

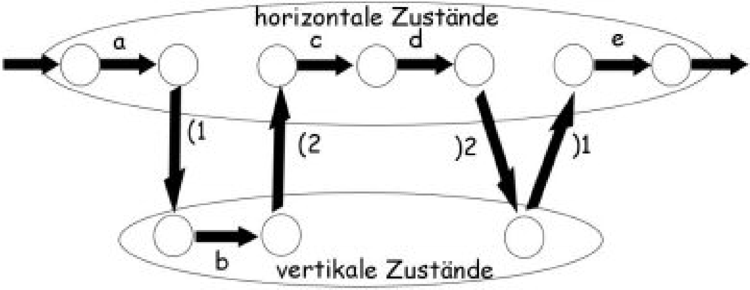
Die Sprache eines Klammerautomaten S ist die Menge
$L(S) = \{P \in SPB(\Sigma) | \exists i \in I, f \in F : \; [i, P, f]_S\}$.

Reg

Die Sprache eines Klammerautomaten S ist die Menge
$L(S) = \{P \in SPB(\Sigma) | \exists i \in I, f \in F : \ [i, P, f]_S\}$.

Reg ist die Menge aller Biposet-Sprachen, die durch einen Klammerautomaten erkannt werden.

Beispiel



Dieser Automat erkennt die Sprache $\{a \bullet (b \circ (c \bullet d)) \bullet e\}$

Reg = Rec

Theorem

$$Reg = Rec$$

Reg = Rec

Theorem

$$Reg = Rec$$

$Reg \subseteq Rec$, denn sei L regulär und S erkenne L

Definiere $\backsim$ wie folgt:

$$P \backsim Q \iff \forall p, q \in S: \; [p, P, q]_S \longleftrightarrow [p, Q, q]_S$$

Reg = Rec

Theorem

$$Reg = Rec$$

$Reg \subseteq Rec$, denn sei L regulär und S erkenne L

Definiere $\backsim$ wie folgt:

$$P \backsim Q \iff \forall p, q \in S : \ [p, P, q]_S \longleftrightarrow [p, Q, q]_S$$

klar: $\backsim$ ist eine Äquivalenzrelation

Reg = Rec

Theorem

$$Reg = Rec$$

$Reg \subseteq Rec$, denn sei L regulär und S erkenne L

Definiere $\backsim$ wie folgt:

$$P \backsim Q \iff \forall p, q \in S : \ [p, P, q]_S \longleftrightarrow [p, Q, q]_S$$

klar: $\backsim$ ist eine Äquivalenzrelation

$\backsim$ ist sogar eine Kongruenz.

Reg $\subseteq$ Rec

Hilfslemma:

(i) $p, q \in H \Rightarrow ([p, P{\bullet}R, q]_S \iff \exists r \in H :\ [p, P, r]_S \text{ und } [r, R, q]_S)$

(ii) $p, q \in V \Rightarrow ([p, P \bullet R, q]_S \iff \exists (_k,)_k \in \Omega, p', r', q' \in H :$

$(p, (_k, p') \in \gamma, [p', P, r']_S, [r', R, q']_S \text{ und } (q',)_k, q) \in \gamma)$

Reg $\subseteq$ Rec

Hilfslemma:

(i) $p, q \in H \Rightarrow ([p, P{\bullet}R, q]_S \iff \exists r \in H :\ [p, P, r]_S$ und $[r, R, q]_S)$

(ii) $p, q \in V \Rightarrow ([p, P \bullet R, q]_S \iff \exists (_k,)_k \in \Omega, p', r', q' \in H :$
$(p, (_k, p') \in \gamma, [p', P, r']_S, [r', R, q']_S$ und $(q',)_k, q) \in \gamma)$

Nun gilt: $P \backsim Q \Longrightarrow P \bullet R \backsim Q \bullet R$ für $R \in SPB(\Sigma)$

Reg $\subseteq$ Rec

Hilfslemma:

(i) $p, q \in H \Rightarrow ([p, P \bullet R, q]_S \iff \exists r \in H :\ [p, P, r]_S \text{ und } [r, R, q]_S)$

(ii) $p, q \in V \Rightarrow ([p, P \bullet R, q]_S \iff \exists (_k,)_k \in \Omega, p', r', q' \in H :$

$$(p, (_k, p') \in \gamma, [p', P, r']_S, [r', R, q']_S \text{ und } (q',)_k, q) \in \gamma)$$

Nun gilt: $P \backsim Q \Longrightarrow P \bullet R \backsim Q \bullet R$ für $R \in SPB(\Sigma)$

Analog:

$$P \backsim Q \Longrightarrow R \bullet P \backsim R \bullet Q$$

$$P \backsim Q \Longrightarrow P \circ R \backsim Q \circ R$$

$$P \backsim Q \Longrightarrow R \circ P \backsim R \circ Q$$

$\mathrm{Reg} \subseteq \mathrm{Rec}$

Seien nun $P \in L$ und $P \backsim Q$.

$$\begin{aligned} &P \in L \\ &\Longrightarrow \exists i \in I, f \in F : \; [i, P, f]_S \\ &\Longrightarrow \exists i \in I, f \in F : \; [i, Q, f]_S \\ &\Longrightarrow Q \in L \end{aligned}$$

Reg $\subseteq$ Rec

Seien nun $P \in L$ und $P \backsim Q$.

$P \in L$
$\Longrightarrow \exists i \in I, f \in F: \; [i, P, f]_S$
$\Longrightarrow \exists i \in I, f \in F: \; [i, Q, f]_S$
$\Longrightarrow Q \in L$

$\backsim$ saturiert also L und somit gilt $Reg \subseteq Rec$

Rec $\subseteq$ Reg

$Rec \subseteq Reg$, denn sei L erkennbar.

$\exists$ endliche Bisemigruppe $B = (B, \bullet, \circ)$ und Homomorphismus $h: \; SPB(\Sigma) \longrightarrow B$ und $F_B \subseteq B$ mit $L = h^{-1}(F_B)$

Rec $\subseteq$ Reg

Rec $\subseteq$ *Reg*, denn sei L erkennbar.

$\exists$ endliche Bisemigruppe $B = (B, \bullet, \circ)$ und Homomorphismus $h: \ SPB(\Sigma) \longrightarrow B$ und $F_B \subseteq B$ mit $L = h^{-1}(F_B)$

konstruiere Automaten $S = (S, H, V, \Sigma, \Omega, \delta, \gamma, I, F)$ mit $L(S) = L$.

- $H = \{s^H \mid s \in B\}$ und $V = \{s^V \mid s \in B\}$ und $S = H \dot{\cup} V$
- $\Omega = \{(_s,)_s \mid s \in B\}$
- $I = \{1^H\}$
- $F = \{f^H \mid f \in F_B\}$

Rec $\subseteq$ Reg

Nun fehlen noch δ und γ:

$$\forall s, t \in B, a \in \Sigma :$$
$$(s^H, a, t^H) \in \delta \Longleftrightarrow s \bullet h(a) = t$$
$$(s^V, a, t^V) \in \delta \Longleftrightarrow s \circ h(a) = t$$

$\mathrm{Rec} \subseteq \mathrm{Reg}$

Nun fehlen noch δ und γ:

$$\forall s, t \in B, a \in \Sigma :$$
$$(s^H, a, t^H) \in \delta \iff s \bullet h(a) = t$$
$$(s^V, a, t^V) \in \delta \iff s \circ h(a) = t$$

Es gilt: $s \circ 1 = s = s \bullet 1$ für alle $s \in B$.

$\Longrightarrow (s^H, (_s, 1^V) \in \gamma$ und $(s^V, (_s, 1^H) \in \gamma$

$$\forall s, t, u \in B :$$
$$(u^V,)_s, t^H) \in \gamma \iff s \bullet u = t$$
$$(u^H,)_s, t^V) \in \gamma \iff s \circ u = t$$

Rec $\subseteq$ Reg

<u>n.z.z.:</u> $L(S) = L$

Rec $\subseteq$ Reg

n.z.z.: $L(S) = L$

Hilfslemma:

$$\forall P \in SPB(\Sigma) \text{ und } \forall s, t \in B \text{ gilt:}$$

$$[s^H, P, t^H]_S \Longleftrightarrow s \bullet h(P) = t$$

$$[s^V, P, t^V]_S \Longleftrightarrow s \circ h(P) = t$$

Rec $\subseteq$ Reg

Nun gilt für $P \in SPB(\Sigma)$:

$$h(P) \in F$$
$$\iff 1 \bullet h(P) = f \in F$$
$$\iff [1^H, P, f^H]_S$$
$$\iff S \text{ akzeptiert } P$$

Rec $\subseteq$ Reg

Nun gilt für $P \in SPB(\Sigma)$:

$$
\begin{aligned}
& h(P) \in F \\
\iff & 1 \bullet h(P) = f \in F \\
\iff & [1^H, P, f^H]_S \\
\iff & S \text{ akzeptiert } P
\end{aligned}
$$

Also gilt: $L(S) = h^{-1}(F) = L$

$\mathrm{Rec} \subseteq \mathrm{Reg}$

Nun gilt für $P \in SPB(\Sigma)$:

$h(P) \in F$
$\iff 1 \bullet h(P) = f \in F$
$\iff [1^H, P, f^H]_S$
$\iff S$ akzeptiert P

Also gilt: $L(S) = h^{-1}(F) = L$

Somit ist $Rec \subseteq Reg$.

Überblick

BRat und GRat

Seien $L_1, L_2 \subseteq SPB(\Sigma)$.

$$L_1 \bullet L_2 = \{P \bullet Q \mid P \in L_1, Q \in L_2\}$$

$$L_1 \circ L_2 = \{P \circ Q \mid P \in L_1, Q \in L_2\}$$

$$L_1^{+\bullet} = \{P_1 \bullet \cdots \bullet P_n \mid P_i \in L_1, n \geq 1\}$$

$$L_1^{+\circ} = \{P_1 \circ \cdots \circ P_n \mid P_i \in L_1, n \geq 1\}$$

BRat und GRat

BRat ist die kleinste Menge, die die endlichen Sprachen aus $SPB(\Sigma)$ enthält und unter $\cup$, $\bullet$, $\circ$ und unter $+\bullet$ und $+\circ$ abgeschlossen ist.

BRat und GRat

BRat ist die kleinste Menge, die die endlichen Sprachen aus $SPB(\Sigma)$ enthält und unter $\cup$, $\bullet$, $\circ$ und unter $+\bullet$ und $+\circ$ abgeschlossen ist.

GRat ist die kleinste Menge, die die endlichen Sprachen aus $SPB(\Sigma)$ enthält und unter $\cup$, ^{c}, $\bullet$, $\circ$ und unter $+\bullet$ und $+\circ$ abgeschlossen ist.

BRat und GRat

BRat ist die kleinste Menge, die die endlichen Sprachen aus $SPB(\Sigma)$ enthält und unter $\cup$, $\bullet$, $\circ$ und unter $+\bullet$ und $+\circ$ abgeschlossen ist.

GRat ist die kleinste Menge, die die endlichen Sprachen aus $SPB(\Sigma)$ enthält und unter $\cup$, ^{c}, $\bullet$, $\circ$ und unter $+\bullet$ und $+\circ$ abgeschlossen ist.

klar: $BRat \subseteq GRat$.

nichtuniforme ξ-Substitution

Seien $L_1 = \{a, b\} \subseteq SPB(\Sigma)$ und
$L_2 = \{a \circ (\xi \bullet c) \circ \xi\} \subseteq SPB(\Sigma \dot\cup \xi)$

$$\begin{aligned} L_2[L_1/\xi] = \{ & a \circ (a \bullet c) \circ a, \\ & a \circ (a \bullet c) \circ b, \\ & a \circ (b \bullet c) \circ a, \\ & a \circ (b \bullet c) \circ b\} \end{aligned}$$

nochmal Rec

Theorem

Die Klasse Rec ist abgeschlossen unter $\bullet$ und $\circ$, $+\bullet$ und $+\circ$ und unter nichtuniformer ξ-Substitution.

nochmal Rec

Theorem

Die Klasse Rec ist abgeschlossen unter $\bullet$ und $\circ$, $+\bullet$ und $+\circ$ und unter nichtuniformer ξ-Substitution.

Beweis: Aus ξ-Substitution folgt Abgeschlossenheit bezüglich der Produkte und der Iterationen.

nochmal Rec

Theorem

Die Klasse Rec ist abgeschlossen unter $\bullet$ und $\circ$, $+\bullet$ und $+\circ$ und unter nichtuniformer ξ-Substitution.

Beweis: Aus ξ-Substitution folgt Abgeschlossenheit bezüglich der Produkte und der Iterationen.

Seien $\xi_1, \xi_2 \notin \Sigma$.
klar: $\{\xi_1\}$ und $\{\xi_2\}$ sind erkennbar.
klar: $\{\xi_1 \bullet \xi_2\}$ und $\xi_1^{+\bullet}$ sind erkennbar

nochmal Rec

Theorem

Die Klasse Rec ist abgeschlossen unter $\bullet$ und $\circ$, $+\bullet$ und $+\circ$ und unter nichtuniformer ξ-Substitution.

Beweis: Aus ξ-Substitution folgt Abgeschlossenheit bezüglich der Produkte und der Iterationen.

Seien $\xi_1, \xi_2 \notin \Sigma$.
klar: $\{\xi_1\}$ und $\{\xi_2\}$ sind erkennbar.
klar: $\{\xi_1 \bullet \xi_2\}$ und $\xi_1^{+\bullet}$ sind erkennbar

$L_1 \bullet L_2 = (\{\xi_1 \bullet \xi_2\}[L_1/\xi_1])[L_2/\xi_2]$ und $L_1^{+\bullet} = \xi_1^{+\bullet}[L_1/\xi_1]$.

nochmal Rec

Theorem

Die Klasse Rec ist abgeschlossen unter $\bullet$ und $\circ$, $+\bullet$ und $+\circ$ und unter nichtuniformer ξ-Substitution.

Beweis: Aus ξ-Substitution folgt Abgeschlossenheit bezüglich der Produkte und der Iterationen.

Seien $\xi_1, \xi_2 \notin \Sigma$.
klar: $\{\xi_1\}$ und $\{\xi_2\}$ sind erkennbar.
klar: $\{\xi_1 \bullet \xi_2\}$ und $\xi_1^{+\bullet}$ sind erkennbar

$L_1 \bullet L_2 = (\{\xi_1 \bullet \xi_2\}[L_1/\xi_1])[L_2/\xi_2]$ und $L_1^{+\bullet} = \xi_1^{+\bullet}[L_1/\xi_1]$.

Analog für $\circ$ anstelle von $\bullet$.

ξ-Substitution

Beweis: Seien $L_1 \subseteq SPB(\Sigma), L_2 \subseteq SPB(\Sigma \dot{\cup} \{\xi\})$ erkennbar durch S_1 bzw. S_2

Grundidee: in S_2 alle Transitionen $(p, \xi, q) \in \delta_2$ für $p, q \in S_2$ durch Kopie von S_1 ersetzen.

Sei dazu S der Automat, der $L_2[L_1/\xi]$ erkennen soll.

ξ-Substitution

Beweis: Seien $L_1 \subseteq SPB(\Sigma), L_2 \subseteq SPB(\Sigma \dot{\cup} \{\xi\})$ erkennbar durch S_1 bzw. S_2

Grundidee: in S_2 alle Transitionen $(p, \xi, q) \in \delta_2$ für $p, q \in S_2$ durch Kopie von S_1 ersetzen.

Sei dazu S der Automat, der $L_2[L_1/\xi]$ erkennen soll.

Wenn $(i, a, f) \in \delta_1$ für $a \in \Sigma, i \in I_1, f \in F_1$, dann füge (p, a, q) zu S hinzu.

ξ-Substitution

Beweis: Seien $L_1 \subseteq SPB(\Sigma), L_2 \subseteq SPB(\Sigma \dot{\cup} \{\xi\})$ erkennbar durch S_1 bzw. S_2

Grundidee: in S_2 alle Transitionen $(p, \xi, q) \in \delta_2$ für $p, q \in S_2$ durch Kopie von S_1 ersetzen.

Sei dazu S der Automat, der $L_2[L_1/\xi]$ erkennen soll.

Wenn $(i, a, f) \in \delta_1$ für $a \in \Sigma, i \in I_1, f \in F_1$, dann füge (p, a, q) zu S hinzu.

nur $p, q \in H$ betrachtet. $p, q \in V$ analog.

Sei $P \in L_1$:
Wenn $[i, P, f]_{S_1}$ mit $i \in I_1 \cap H_1$ und $f \in F_1 \cap H_1$, dann dupliziere alle Transitionen dieses Laufs und starte sie in $p \in S_2$ und beende sie in $q \in S_2$.

ξ-Substitution

Beweis: Seien $L_1 \subseteq SPB(\Sigma), L_2 \subseteq SPB(\Sigma \dot\cup \{\xi\})$ erkennbar durch S_1 bzw. S_2

Grundidee: in S_2 alle Transitionen $(p, \xi, q) \in \delta_2$ für $p, q \in S_2$ durch Kopie von S_1 ersetzen.

Sei dazu S der Automat, der $L_2[L_1/\xi]$ erkennen soll.

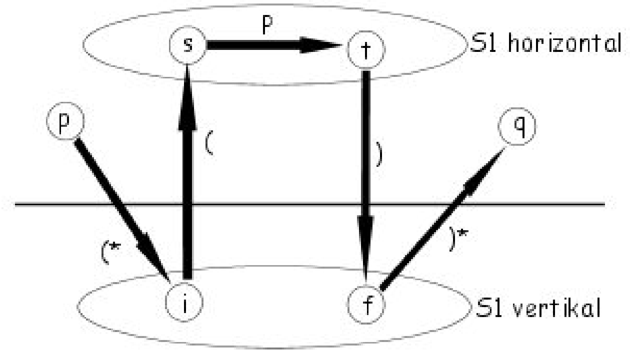
Wenn $(i, a, f) \in \delta_1$ für $a \in \Sigma, i \in I_1, f \in F_1$, dann füge (p, a, q) zu S hinzu.

nur $p, q \in H$ betrachtet. $p, q \in V$ analog.

Sei $P \in L_1$:
Wenn $[i, P, f]_{S_1}$ mit $i \in I_1 \cap H_1$ und $f \in F_1 \cap H_1$, dann dupliziere alle Transitionen dieses Laufs und starte sie in $p \in S_2$ und beende sie in $q \in S_2$.
Wenn $[i, P, f]_{S_1}$ mit $i \in I_1 \cap V_1$ und $f \in F_1 \cap V_1$, dann füge **neues** Klammerpaar $(_*,)_* \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$ hinzu. Füge $(p, (_*, i)$ und $(f,)_*, q)$ zu S hinzu.

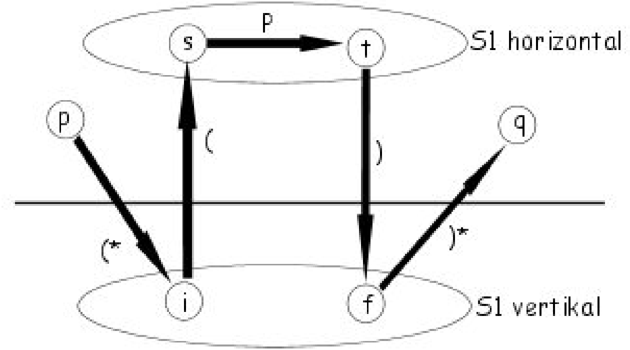
Probleme bei ξ-Substitution

Es kann passieren, dass $s, t \in H_1$ verbunden sind mit $i \in V_1 \cap I_1$ und $f \in V_1 \cap F_1$.
Sei $[s, P, t]_{S_1}$, dann auch $[i, P, f]_{S_1}$.



Probleme bei ξ-Substitution

Es kann passieren, dass $s, t \in H_1$ verbunden sind mit $i \in V_1 \cap I_1$ und $f \in V_1 \cap F_1$.
Sei $[s, P, t]_{S_1}$, dann auch $[i, P, f]_{S_1}$.



Aber: $[p, P, q]_S$ gilt nicht, da "Doppelklammerung" verboten.

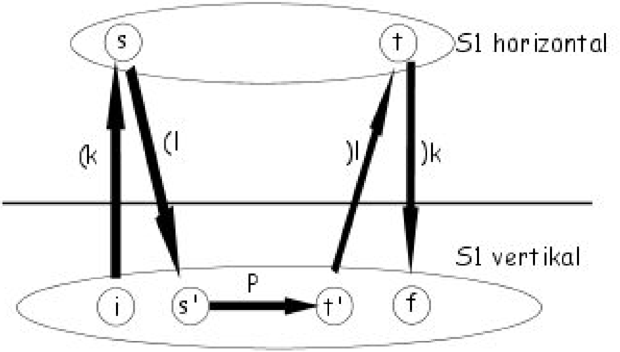
Probleme bei ξ-Substitution

Ausweg: Zustände s und t initial bzw. final in S_1 machen.

Probleme bei ξ-Substitution

Ausweg: Zustände s und t initial bzw. final in S_1 machen.

Aber: wenn $(s', t') \in V_1^2$ mit (s, t) verbunden sind und $[s', P, t']_{S_1}$ für vertikales P, dann ist $[i, P, f]_{S_1}$ ungültig ("Doppelklammerung")



$\Longrightarrow [p, P, q]_S$ darf nicht in S vorkommen.

Probleme bei ξ-Substitution

durch s, t initial bzw. final wäre aber $[p, P, q]_S$.

Ausweg:
Trenne die Klammerpaare, die zu Doppelklammerung führen.

Alternationstiefe

$\Longrightarrow$ *BRat* $\subseteq$ *Rec*
nächster Schritt: *BRat* näher charakterisieren.

Alternationstiefe $ad(P)$ von $P \in SPB(\Sigma)$ ist:

$$ad(P) = 0, \text{ wenn } P = a \in \Sigma$$

$$ad(P) = \max\{ad(P_1), \cdots, ad(P_n)\} + 1, \text{ wenn } P = P_1 \bullet \cdots \bullet P_n$$
$$ad(P) = \max\{ad(P_1), \cdots, ad(P_n)\} + 1, \text{ wenn } P = P_1 \circ \cdots \circ P_n$$

wobei Dekompositionen stets maximal!

Alternationstiefe

$\Longrightarrow$ *BRat* $\subseteq$ *Rec*
nächster Schritt: *BRat* näher charakterisieren.

Alternationstiefe $ad(P)$ von $P \in SPB(\Sigma)$ ist:

$$ad(P) = 0, \text{ wenn } P = a \in \Sigma$$

$$ad(P) = \max\{ad(P_1), \cdots, ad(P_n)\} + 1, \text{ wenn } P = P_1 \bullet \cdots \bullet P_n$$

$$ad(P) = \max\{ad(P_1), \cdots, ad(P_n)\} + 1, \text{ wenn } P = P_1 \circ \cdots \circ P_n$$

wobei Dekompositionen stets maximal!

Alternationstiefe einer Sprache $L \subseteq SPB(\Sigma)$ ist
$ad(L) = \sup\{ad(P) \mid P \in L\}$.

Beispiel

$$P = a \bullet (b \circ (c \bullet d)) \bullet e$$

Beispiel

$$P = a \bullet (b \circ (c \bullet d)) \bullet e$$

$$ad(c) = ad(d) = 0$$

Beispiel

$$P = a \bullet (b \circ (c \bullet d)) \bullet e$$

$$ad(c) = ad(d) = 0$$

$$ad(c \bullet d) = 1$$

Beispiel

$$P = a \bullet (b \circ (c \bullet d)) \bullet e$$

$$ad(c) = ad(d) = 0$$

$$ad(c \bullet d) = 1$$

$$ad(b \circ (c \bullet d)) = 2$$

Beispiel

$$P = a \bullet (b \circ (c \bullet d)) \bullet e$$

$$ad(c) = ad(d) = 0$$

$$ad(c \bullet d) = 1$$

$$ad(b \circ (c \bullet d)) = 2$$

$$ad(P) = 3$$

BD

$BD^{\leq n}$ ist die Klasse der Sprachen mit $ad(L) \leq n$.

$BD = \bigcup_{n<\infty} BD^{\leq n}$

Charakterisierung von *BRat*

Theorem

$$BRat = Rec \cap BD$$

Charakterisierung von *BRat*

Theorem

$$BRat = Rec \cap BD$$

Beweis: $BRat \subseteq Rec$ folgt aus Abgeschlossenheit von Rec.
$BRat \subseteq BD$ folgt aus Abgeschlossenheit von BD bzgl.
$\cup, \bullet, \circ, +\bullet, +\circ$.
$\Longrightarrow BRat \subseteq Rec \cap BD$

$Rec \cap BD \subseteq BRat$

Sei $L \in Rec \cap BD$.
$\Longrightarrow \exists n \geq 0$ mit $L \in BD^{\leq n}$ und $\exists$ Automat S mit $L(S) = L$.

$Rec \cap BD \subseteq BRat$

Sei $L \in Rec \cap BD$.
$\Longrightarrow \exists n \geq 0$ mit $L \in BD^{\leq n}$ und $\exists$ Automat S mit $L(S) = L$.

$L^{[\leq n]} = \{P \in L \mid ad(P) \leq n\}$

Grundidee: per Induktion zeigen, dass $L^{[\leq n]} \in BRat$

$L^{[\leq n]}_{q1,q2} = \{P \in SPB(\Sigma) \mid ad(P) \leq n \text{ und } [q_1, P, q_2]_S\}$

$Rec \cap BD \subseteq BRat$

Sei $L \in Rec \cap BD$.
$\Longrightarrow \exists n \geq 0$ mit $L \in BD^{\leq n}$ und $\exists$ Automat S mit $L(S) = L$.

$L^{[\leq n]} = \{P \in L \mid ad(P) \leq n\}$

Grundidee: per Induktion zeigen, dass $L^{[\leq n]} \in BRat$

$L^{[\leq n]}_{q1,q2} = \{P \in SPB(\Sigma) \mid ad(P) \leq n \text{ und } [q_1, P, q_2]_S\}$

$\Longrightarrow L^{[\leq n]} = \bigcup_{i \in I, f \in F} L^{[\leq n]}_{i,f}$

$Rec \cap BD \subseteq BRat$

$\underline{n = 0:}$

$$\begin{aligned} L_{q1,q2}^{[\leq 0]} &= \{P \in SPB(\Sigma) \mid ad(P) \leq 0 \text{ und } [q_1, P, q_2]_S\} \\ &= \{a \in \Sigma \mid (q_1, a, q_2) \in \delta\} \in BRat \end{aligned}$$

$Rec \cap BD \subseteq BRat$

$\underline{n = 0:}$

$$L_{q1,q2}^{[\leq 0]} = \{P \in SPB(\Sigma) \mid ad(P) \leq 0 \text{ und } [q_1, P, q_2]_S\}$$
$$= \{a \in \Sigma \mid (q_1, a, q_2) \in \delta\} \in BRat$$

$\underline{n \longrightarrow n+1:}$ nur $q_1, q_2 \in H$ betrachtet. $q_1, q_2 \in V$ analog.

gesucht: birationaler Ausdruck für $L_{q_1,q_2}^{[\leq n+1]}$

$Rec \cap BD \subseteq BRat$

$\underline{n = 0:}$

$$L_{q1,q2}^{[\leq 0]} = \{P \in SPB(\Sigma) \mid ad(P) \leq 0 \text{ und } [q_1, P, q_2]_S\}$$
$$= \{a \in \Sigma \mid (q_1, a, q_2) \in \delta\} \in BRat$$

$\underline{n \longrightarrow n+1:}$ nur $q_1, q_2 \in H$ betrachtet. $q_1, q_2 \in V$ analog.

gesucht: birationaler Ausdruck für $L_{q_1,q_2}^{[\leq n+1]}$

IV $\Longrightarrow L_{s_1,s_2}^{[\leq n]} \in BRat$ für alle $s_1, s_2 \in H$ oder $s_1, s_2 \in V$

IV $\Longrightarrow \exists$ birationaler Ausdruck $E_{s_1,s_2}^{[\leq n]}$ für jede Sprache $L_{s_1,s_2}^{[\leq n]}$.

$Rec \cap BD \subseteq BRat$

HL_{s_1,s_2} sei (klassische) reguläre Sprache für (klassischen) Automat $\mathcal{A} = (H, \delta, \{s_1\}, \{s_2\})$ über Alphabet $H \times H$.
$\delta = \{(p_1, (p_1, p_2), p_2) \mid (p_1, p_2) \in H \times H\}$ "Pfadsprache"

HE_{s_1,s_2} sei rationaler Ausdruck für HL_{s_1,s_2} (Kleene)

$Rec \cap BD \subseteq BRat$

HL_{s_1,s_2} sei (klassische) reguläre Sprache für (klassischen) Automat $\mathcal{A} = (H, \delta, \{s_1\}, \{s_2\})$ über Alphabet $H \times H$.
$\delta = \{(p_1, (p_1, p_2), p_2) \mid (p_1, p_2) \in H \times H\}$ "Pfadsprache"

HE_{s_1,s_2} sei rationaler Ausdruck für HL_{s_1,s_2} (Kleene)

Definiere VL_{s_1,s_2} und VE_{s_1,s_2} analog für $s_1, s_2 \in V$.
$VE^{++}_{s_1,s_2}$ sei rationaler Ausdruck für $w \in VL_{s_1,s_2}$ mit $|w| \geq 2$.

$Rec \cap BD \subseteq BRat$

HL_{s_1,s_2} sei (klassische) reguläre Sprache für (klassischen) Automat $\mathcal{A} = (H, \delta, \{s_1\}, \{s_2\})$ über Alphabet $H \times H$.
$\delta = \{(p_1, (p_1, p_2), p_2) \mid (p_1, p_2) \in H \times H\}$ "Pfadsprache"

HE_{s_1,s_2} sei rationaler Ausdruck für HL_{s_1,s_2} (Kleene)

Definiere VL_{s_1,s_2} und VE_{s_1,s_2} analog für $s_1, s_2 \in V$.
$VE^{++}_{s_1,s_2}$ sei rationaler Ausdruck für $w \in VL_{s_1,s_2}$ mit $|w| \geq 2$.

$$\Longrightarrow E^{[\leq n+1]}_{q_1,q_2} = HE_{q_1,q_2}[E^{[\leq n]}_{s_1,s_2}/(s_1,s_2)] \cup \bigcup_{(q_1,(,p_1),(p_2,),q_2)\in\Omega} VE^{++}_{p_1,p_2}[E^{[\leq n]}_{s_1,s_2}/(s_1,s_2)]$$

HRat und VRat

HRat ist die kleinste Menge, die die endlichen Sprachen aus $SPB(\Sigma)$ enthält und unter $\cup$, $\bullet$, $\circ$ und unter $+\bullet$ abgeschlossen ist.

HRat und VRat

HRat ist die kleinste Menge, die die endlichen Sprachen aus $SPB(\Sigma)$ enthält und unter $\cup$, $\bullet$, $\circ$ und unter $+\bullet$ abgeschlossen ist.

VRat ist die kleinste Menge, die die endlichen Sprachen aus $SPB(\Sigma)$ enthält und unter $\cup$, $\bullet$, $\circ$ und unter $+\circ$ abgeschlossen ist.

HB und VB

HB ist die Menge der horizontal beschränkten Sprachen.
$\forall L \in HB \;\; \exists$ Konstante K, so dass $\forall P \in L$ die Länge jeder $<_h$-Kette von P durch K begrenzt ist.

HB und VB

HB ist die Menge der horizontal beschränkten Sprachen.
$\forall L \in HB \;\; \exists$ Konstante K, so dass $\forall P \in L$ die Länge jeder $<_h$-Kette von P durch K begrenzt ist.

VB ist die Menge der vertikal beschränkten Sprachen.
$\forall P \in VB \;\; \exists$ Konstante K, so dass $\forall P \in L$ die Länge jeder $<_v$-Kette von P durch K begrenzt ist.

letzte Zusammenhänge

Theorem

$$HRat = Rec \cap VB \text{ und } VRat = Rec \cap HB$$

letzte Zusammenhänge

Theorem

$$HRat = Rec \cap VB \text{ und } VRat = Rec \cap HB$$

Beweis: $HRat = Brat \cap VB = Rec \cap BD \cap VB = Rec \cap VB$

letzte Zusammenhänge

Theorem

$$HRat = Rec \cap VB \text{ und } VRat = Rec \cap HB$$

Beweis: $HRat = Brat \cap VB = Rec \cap BD \cap VB = Rec \cap VB$

analog $VRat = Brat \cap HB = Rec \cap BD \cap HB = Rec \cap HB$

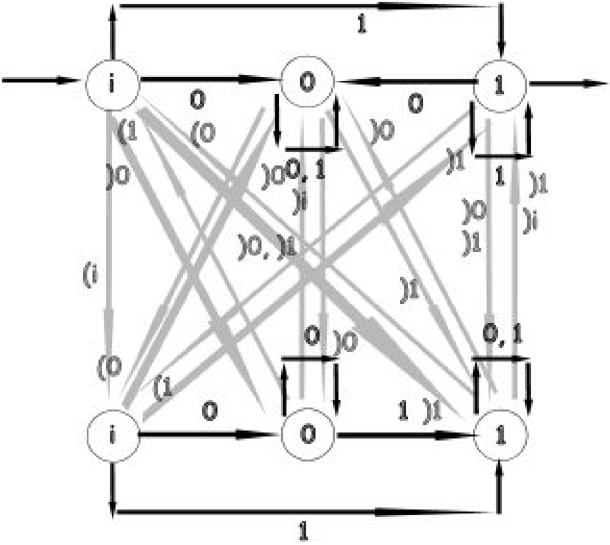
Ausblick

Alle Resultate,
die in dem Paper gemacht wurden, kann man auch für $n > 2$ zeigen.

Es ist für $L \in Rec$ entscheidbar, ob $L \in BRat$ oder $L \in HRat$ oder $L \in VRat$.

$Rec = MSO$.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.



Dieser Automat erkennt alle Bool-Formeln, die zu 1 ausgewertet werden. (ohne Gewähr)