The equality problem for rational series with multiplicities in the tropical semiring is undecidable

Daniel Krob

30.11.2006

Überblick

grundlegende Definitionen

Das 10. Hilbertsche Problem und das Resultat von Adler

- Hilberts Konferenz
- Adlers Resultat

äquivalente Entscheidbarkeitsprobleme

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

- Die Gleichung HD
- HD durch Potenzreihen kodieren

Unentscheidbarkeit über dem tropischen Semiring

grundlegende Definitionen

Ein Semiring S ist ein 5-Tupel $(K, \oplus, \otimes, 0_K, 1_K)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $(K, \oplus, 0_K)$ ist ein kommutatives Monoid mit neutralem Element 0_K
- $(K, \otimes, 1_K)$ ist ein Monoid mit neutralem Element 1_K
- $\otimes$ ist links- und rechtsdistributiv über $\oplus$
- $\forall k \in K$ gilt: $k \otimes 0_K = 0_K \otimes k = 0_K$
- $1_K \neq 0_K$

Beispiel für Semiringe

$$M = (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \mathsf{min}, +, +\infty, 0) \qquad \longleftarrow \text{ tropischer Semiring}$$

$$Z = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \mathsf{min}, +, +\infty, 0) \qquad \longleftarrow \text{ tropisch } Z$$

$$N = (\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \mathsf{max}, +, -\infty, 0) \qquad \longleftarrow \text{ arktischer Semiring}$$

$$\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, 0, 1) \qquad \longleftarrow \text{ boolescher Semiring}$$

grundlegende Definitionen

Sei A ein beliebiges Alphabet und S ein beliebiger Semiring. Dann ist ein gewichteter Automat $\mathcal{A}$ ein 4-Tupel $(Q, \lambda, \mu, \delta)$ mit:

- Q ist (endliche) Menge (von Zuständen)
- $\lambda : Q \longrightarrow S$ (Eintrittskosten in den Automat)
- $\mu : Q \times A \times Q \longrightarrow S$ (Kosten der Transitionen)
- $\delta : Q \longrightarrow S$ (Austrittskosten aus dem Automat)

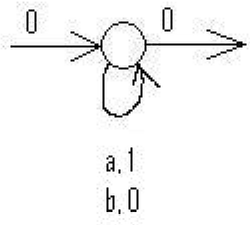
Das Verhalten von $\mathcal{A}$ ist definiert als

$$(\mathcal{A}|\omega) = \bigoplus_{i,j \in Q} \lambda_i \otimes \mu(\omega)_{ij} \otimes \delta_j$$

Beispiel für gewichtete Automaten

Dieser gewichtete Automat erkennt $|\omega|_a$ für $\omega \in \{a, b\}^*$ über dem tropischen Semiring $M = (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0)$

$\lambda = (0)$ $\quad\quad$ $\delta = (0)$
$\mu(a) = (1)$ $\quad\quad$ $\mu(b) = (0)$



grundlegende Definitionen

Sei S ein Semiring, A ein Alphabet.

Mit $\underline{S\mathrm{Rat}(A)}$ bezeichnet man die Menge

$$\{K : A^* \longrightarrow S \mid K \text{ rational}\}$$

Mit $\underline{S\mathrm{Rec}(A)}$ bezeichnet man die Menge

$$\{K : A^* \longrightarrow S \mid K \text{ erkennbar}\}$$

Schützenberger hat 1961 gezeigt, dass

$$S\mathrm{Rat}(A) = S\mathrm{Rec}(A)$$

grundlegende Definitionen

Das Hadamard-Produkt zweier Potenzreihen P, Q ist

$$(P \odot Q|\omega) = (P|\omega) \otimes (Q|\omega)$$

Überblick

Das 10. Hilbertsche Problem und das Resultat von Adler

1900 gab es eine Konferenz, in der David Hilbert 23 mathematische Probleme formulierte, die es zu lösen gilt.

Das 10. Hilbertsche Problem und das Resultat von Adler

1900 gab es eine Konferenz, in der David Hilbert 23 mathematische Probleme formulierte, die es zu lösen gilt.

Im Beweis ist das 10te Hilbertsche Problem essentiell.
1970 hat Yuri Matijassewitsch bewiesen, dass dieses Problem im Allgemeinen unentscheidbar ist.

Das 10. Hilbertsche Problem und das Resultat von Adler

Das 10te Hilbertsche Problem lautet:

Kann man entscheiden, ob eine beliebige diophantische Gleichung lösbar ist?

Das 10. Hilbertsche Problem und das Resultat von Adler

Das 10te Hilbertsche Problem lautet:

Kann man entscheiden, ob eine beliebige diophantische Gleichung lösbar ist?

Eine diophantische Gleichung ist ein Polynom der Form $f(x_1, ..., x_n) = 0$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und bei dem nur Lösungen in $\mathbb{Z}$ von Interesse sind.

Das 10. Hilbertsche Problem und das Resultat von Adler

Resultat von Adler:
Jede diophantische Gleichung ist äquivalent
zu einem homogenen Polynom 4. Grades der Form $P(x_1, ..., x_n) = 1$.

Das 10. Hilbertsche Problem und das Resultat von Adler

Resultat von Adler:
Jede diophantische Gleichung ist äquivalent
zu einem homogenen Polynom 4. Grades der Form $P(x_1, ..., x_n) = 1$.

Ein homogenes Polynom 4. Grades ist ein Polynom, in dem die Summe der Potenzen der Unbestimmten (für ein Monom) jeweils genau 4 ergeben.

Beispiel: $u_1^2 u_2 u_3 + 3u_1 u_2^2 u_4 + 2u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$

Das 10. Hilbertsche Problem und das Resultat von Adler

Es ist auch nicht entscheidbar, ob $P(x_1, ..., x_n) = 1$ eine Lösung in positiven natürlichen Zahlen (ohne 0) besitzt.

Das 10. Hilbertsche Problem und das Resultat von Adler

Es ist auch nicht entscheidbar, ob $P(x_1, ..., x_n) = 1$ eine Lösung in positiven natürlichen Zahlen (ohne 0) besitzt.

Beweisidee:
Jedes $z \in \mathbb{Z}$ lässt sich darstellen als $z = x - y$ mit $x, y \in \mathbb{N}$. Denn für $z \geq 0$ setze $x = z + 1 \wedge y = 1$, für $z < 0$ setze
$x = 1 \wedge y = |z| + 1$

Überblick

äquivalente Entscheidbarkeitsprobleme

Folgende 3 Entscheidbarkeitsprobleme sind äquivalent:

Sei $S = Z$ $(= (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0))$ oder $S = M$ $((\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0))$ und A ein Alphabet.

Seien $P, Q \in \mathrm{SRat}(A)$

Ist $P = Q$? (Eq)

Ist $P \leq Q$? (Ineq)

$\exists \omega \in A^*$ mit $(P|\omega) \leq (Q|\omega)$? (LocalIneq)

äquivalente Entscheidbarkeitsprobleme

Beweisidee:

$Ineq \Longrightarrow Eq$, da $P = Q \Longleftrightarrow P \leq Q \wedge Q \leq P$

äquivalente Entscheidbarkeitsprobleme

Beweisidee:

$Ineq \Longrightarrow Eq$, da $P = Q \Longleftrightarrow P \leq Q \wedge Q \leq P$

$Eq \Longrightarrow Ineq$, da $P \leq Q \Longleftrightarrow P = P \oplus Q = \min(P, Q)$

äquivalente Entscheidbarkeitsprobleme

Beweisidee:

$\mathit{Ineq} \Longrightarrow \mathit{Eq}$, da $P = Q \Longleftrightarrow P \leq Q \wedge Q \leq P$

$\mathit{Eq} \Longrightarrow \mathit{Ineq}$, da $P \leq Q \Longleftrightarrow P = P \oplus Q = \min(P, Q)$

$\mathit{LocalIneq} \Longrightarrow \mathit{Ineq}$, diesen Beweis lasse ich aus Zeitgründen weg.

äquivalente Entscheidbarkeitsprobleme

Ineq $\Longrightarrow$ *LocalIneq*, denn man kann entscheiden, ob $I = \{\omega \in A^* \mid (Q|\omega) = +\infty\}$ leer ist oder nicht.

äquivalente Entscheidbarkeitsprobleme

Ineq $\Longrightarrow$ *LocalIneq*, denn man kann entscheiden, ob $I = \{\omega \in A^* \mid (Q|\omega) = +\infty\}$ leer ist oder nicht.

Ist $I \neq \emptyset$, dann erfüllt jedes $\omega \in I$ LocalIneq.

äquivalente Entscheidbarkeitsprobleme

Ineq $\Longrightarrow$ *LocalIneq*, denn man kann entscheiden, ob $I = \{\omega \in A^* \mid (Q|\omega) = +\infty\}$ leer ist oder nicht.

Ist $I \neq \emptyset$, dann erfüllt jedes $\omega \in I$ LocalIneq.

Ist $I = \emptyset$, dann gilt:
LocalIneq $\iff \neg(\forall \omega \in A^* : \ (P|\omega) > (Q|\omega))$

äquivalente Entscheidbarkeitsprobleme

Ineq $\Longrightarrow$ *LocalIneq*, denn man kann entscheiden, ob
$I = \{\omega \in A^* \mid (Q|\omega) = +\infty\}$ leer ist oder nicht.

Ist $I \neq \emptyset$, dann erfüllt jedes $\omega \in I$ LocalIneq.

Ist $I = \emptyset$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{LocalIneq} &\iff \neg(\forall \omega \in A^* : \ (P|\omega) > (Q|\omega)) \\ &\iff \neg(\forall \omega \in A^* : \ (P|\omega) \geq (Q|\omega) + 1) \end{aligned}$$

äquivalente Entscheidbarkeitsprobleme

$Ineq \Longrightarrow LocalIneq$, denn man kann entscheiden, ob $I = \{\omega \in A^* \mid (Q|\omega) = +\infty\}$ leer ist oder nicht.

Ist $I \neq \emptyset$, dann erfüllt jedes $\omega \in I$ LocalIneq.

Ist $I = \emptyset$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\text{LocalIneq} &\Longleftrightarrow \neg(\forall\omega \in A^* :\ (P|\omega) > (Q|\omega)) \\ &\Longleftrightarrow \neg(\forall\omega \in A^* :\ (P|\omega) \geq (Q|\omega) + 1) \\ &\Longleftrightarrow \neg(P \geq Q \otimes 1)\end{aligned}$$

äquivalente Entscheidbarkeitsprobleme

Im weiteren Beweis zeigen wir nur die Unentscheidbarkeit von LocalIneq über dem Semiring tropisch Z.
Aber aufgrund der oberen Aussagen werden wir die Unentscheidbarkeit von Eq über tropisch Z damit auch zeigen.

Überblick

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Die Entscheidbarkeit des Gleichheitsproblems auf einem beliebigen Semiring S über einem k-buchstabigen Alphabet A_k ist äquivalent zur Entscheidbarkeit desselben Problems über einem l-buchstabigen Alphabet A_l. (mit $k, l \geq 2$)

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Die Entscheidbarkeit des Gleichheitsproblems auf einem beliebigen Semiring S über einem k-buchstabigen Alphabet A_k ist äquivalent zur Entscheidbarkeit desselben Problems über einem l-buchstabigen Alphabet A_l. (mit $k, l \geq 2$)

Beweisidee:
$a, \ b \in A_l$ mit $a \neq b$
σ sei der Monoidhomomorphismus von A_k^* nach A_l^* mit
$\sigma(a_i) = a^i b \ \ \forall a_i \in A_k = \{a_1, ..., a_k\}$

Entscheidbarkeit, ob $E, F \in S << A_k >>$ gleich sind, ist somit äquivalent zur Entscheidbarkeit, ob $\sigma(E), \sigma(F) \in S << A_l >>$ gleich sind.

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Umwandlung eines Polynoms der Form $P(x_1, ..., x_n) = 1$ in ein System der Form

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} p_i \ x_1^{(i)} \ x_2^{(i)} \ x_3^{(i)} \ x_4^{(i)} = 1 \\ \forall (i,j,k,l) \in V \text{ gilt } x_k^{(i)} = x_l^{(j)} \end{cases}$$

$$V \subseteq [1,p] \times [1,p] \times [1,4] \times [1,4]$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Umwandlung eines Polynoms der Form $P(x_1, ..., x_n) = 1$ in ein System der Form

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} p_i \ x_1^{(i)} \ x_2^{(i)} \ x_3^{(i)} \ x_4^{(i)} = 1 \\ \forall (i,j,k,l) \in V \text{ gilt } x_k^{(i)} = x_l^{(j)} \end{cases}$$

$$V \subseteq [1,p] \times [1,p] \times [1,4] \times [1,4]$$

Umbenennung der Variablen:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} p_i \ y_3^{(i)} = 1 \\ \forall (i,j,k,l) \in V \text{ gilt } x_k^{(i)} = x_l^{(i)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall i \in [1,p] \text{ gilt } y_1^{(i)} = x_1^{(i)} \ x_2^{(i)} \\ \forall i \in [1,p] \text{ gilt } y_2^{(i)} = x_3^{(i)} \ x_4^{(i)} \\ \forall i \in [1,p] \text{ gilt } y_3^{(i)} = y_1^{(i)} \ y_2^{(i)} \end{cases}$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Umwandlung des letzten Systems in eine Gleichung:

$$-\left|\sum_{i=1}^{p} p_i \ y_3^{(i)} - 1\right| - \sum_{i=1}^{p}\left|y_1^{(i)} - x_1^{(i)} \ x_2^{(i)}\right| - \sum_{i=1}^{p}\left|y_2^{(i)} - x_3^{(i)} \ x_4^{(i)}\right|$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\left|y_3^{(i)} - y_1^{(i)} \ y_2^{(i)}\right| - \sum_{(i,j,k,l)\in V}\left|x_k^{(i)} - x_l^{(j)}\right| = 0$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Umwandlung des letzten Systems in eine Gleichung:

$$-\left|\sum_{i=1}^{p} p_i \; y_3^{(i)} - 1\right| - \sum_{i=1}^{p}\left|y_1^{(i)} - x_1^{(i)} \; x_2^{(i)}\right| - \sum_{i=1}^{p}\left|y_2^{(i)} - x_3^{(i)} \; x_4^{(i)}\right|$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\left|y_3^{(i)} - y_1^{(i)} \; y_2^{(i)}\right| - \sum_{(i,j,k,l)\in V}\left|x_k^{(i)} - x_l^{(j)}\right| = 0$$

Diese Gleichung wird mit HD bezeichnet.

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

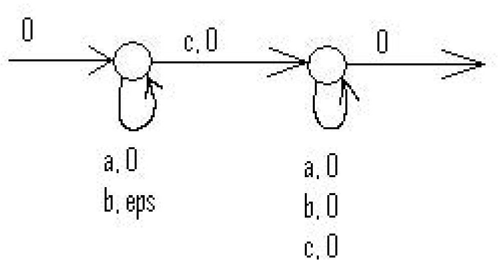
Für die folgenden Folien gilt stets:

- $\epsilon \in \{-1, +1\}$
- $A = \{a, b, c, d\}$ sei ein 4-buchstabiges Alphabet
- $L = (ab^+c)^+$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

$$(Var1(\epsilon)|\omega) = \begin{cases} \epsilon \ n_1 & \text{, wenn } \omega = ab^{n_1}c...ab^{n_k}c \in L \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin L \end{cases}$$

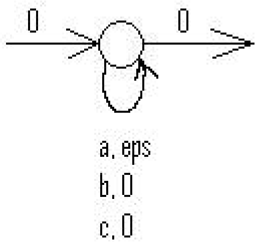
$$Var1(\epsilon) = (S1 \odot \underline{L}) \oplus \underline{(\{a,b,c\}^* - L)}$$



Unentscheidbarkeit über tropisch Z

$$(VarA(\epsilon)|\omega) = \begin{cases} \epsilon \; |\omega|_a = \epsilon \; k & \text{, wenn } \omega = ab^{n_1}c...ab^{n_k}c \in L \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin L \end{cases}$$

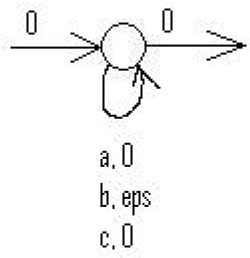
$$VarA(\epsilon) = (S_a(\epsilon) \odot \underline{L}) \oplus \underline{(\{a, b, c\}^* - L)}$$



Unentscheidbarkeit über tropisch Z

$$(VarB(\epsilon)|\omega) = \begin{cases} \epsilon \ |\omega|_b = \epsilon \ (\sum_{i=1}^{k} n_i) & \text{, wenn } \omega = ab^{n_1}c...ab^{n_k}c \in L \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin L \end{cases}$$

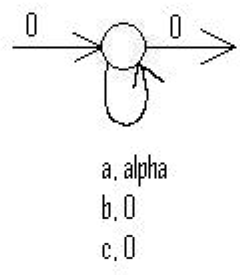
$$VarB(\epsilon) = (S_b(\epsilon) \odot \underline{L}) \oplus \underline{(\{a, b, c\}^* - L)}$$



Unentscheidbarkeit über tropisch Z

$$(VarY(\alpha)|\omega) = \begin{cases} \alpha\ n & \text{, wenn } \omega = a^n \in a^+ \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin a^+ \end{cases}$$

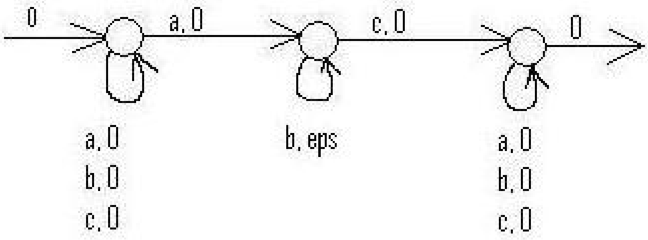
$$VarY(\alpha) = (S_a(\alpha) \odot \underline{a^+}) \oplus \underline{(\{a,b,c\}^* - a^+)}$$



Unentscheidbarkeit über tropisch Z

$$(MinMax(\epsilon)|\omega) = \begin{cases} \min(\epsilon n_i)_{i\in[1,k]} & \text{, wenn } \omega = ab^{n_1}c...ab^{n_k}c \in L \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin L \end{cases}$$

$$MinMax(\epsilon) = (S_\epsilon \odot \underline{L}) \oplus \underline{(\{a,b,c\}^* - L)}$$



Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Nun führt man die rationale Sprache C ein:

$$C = ((ab^+c)^+d(ab^+c)^+d(ab^+c)^+da^+d)^p =$$

$$\prod_{i=1}^{p}((ab^+c)^+d(ab^+c)^+d(ab^+c)^+da^+d)$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Nun führt man die rationale Sprache C ein:

$$C = ((ab^+c)^+d(ab^+c)^+d(ab^+c)^+da^+d)^p =$$

$$\prod_{i=1}^{p}((ab^+c)^+d(ab^+c)^+d(ab^+c)^+da^+d)$$

Man kodiert ein Wort $\omega \in C$ durch

$$\underline{\omega} = \omega_1^{(1)}(\underline{n(1,1)})d\omega_2^{(1)}(\underline{n(1,2)})d\omega_3^{(1)}(\underline{n(1,3)})da^{y_3^{(1)}}d\cdots$$

$$\cdots\omega_1^{(p)}(\underline{n(p,1)})d\omega_2^{(p)}(\underline{n(p,2)})d\omega_3^{(p)}(\underline{n(p,3)})da^{y_3^{(p)}}d$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Nun führt man die rationale Sprache C ein:

$$C = ((ab^+c)^+d(ab^+c)^+d(ab^+c)^+da^+d)^p =$$

$$\prod_{i=1}^{p}((ab^+c)^+d(ab^+c)^+d(ab^+c)^+da^+d)$$

Man kodiert ein Wort $\omega \in C$ durch

$$\underline{\omega} = \omega_1^{(1)}(\underline{n(1,1)})d\omega_2^{(1)}(\underline{n(1,2)})d\omega_3^{(1)}(\underline{n(1,3)})da^{y_3^{(1)}}d\cdots$$

$$\cdots\omega_1^{(p)}(\underline{n(p,1)})d\omega_2^{(p)}(\underline{n(p,2)})d\omega_3^{(p)}(\underline{n(p,3)})da^{y_3^{(p)}}d$$

wobei für $i \in [1,p]$, $j \in \{1,2,3\}$ gilt:
$\omega_j^{(i)}(\underline{n(i,j)}) = ab^{n(i,j)_1}cab^{n(i,j)_2}c\dots ab^{n(i,j)_k}c$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Die Elemente aus C, die uns wirklich interessieren (wie man später noch sieht), werden folgendermassen kodiert:

$$\omega(\underline{xy}) = (ab^{x_1^{(1)}}c)^{x_2^{(1)}}d(ab^{x_3^{(1)}}c)^{x_4^{(1)}}d(ab^{y_1^{(1)}}c)^{y_2^{(1)}}da^{y_3^{(1)}}d\cdots$$

$$\cdots(ab^{x_1^{(p)}}c)^{x_2^{(p)}}d(ab^{x_3^{(p)}}c)^{x_4^{(p)}}d(ab^{y_1^{(p)}}c)^{y_2^{(p)}}da^{y_3^{(p)}}d$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Die Elemente aus C, die uns wirklich interessieren (wie man später noch sieht), werden folgendermassen kodiert:

$$\omega(\underline{xy}) = (ab^{x_1^{(1)}}c)^{x_2^{(1)}}d(ab^{x_3^{(1)}}c)^{x_4^{(1)}}d(ab^{y_1^{(1)}}c)^{y_2^{(1)}}da^{y_3^{(1)}}d\cdots$$
$$\cdots(ab^{x_1^{(p)}}c)^{x_2^{(p)}}d(ab^{x_3^{(p)}}c)^{x_4^{(p)}}d(ab^{y_1^{(p)}}c)^{y_2^{(p)}}da^{y_3^{(p)}}d$$

Dabei ist $\underline{xy}$ der Vektor $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, x_4^{(i)}, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, y_3^{(i)})_{i=1,p} \in (\mathbb{N} - \{0\})^{7p}$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Mithilfe von $Var1(-1)$ definiert man

$$(SumP_{1,1}^{(i)}|\omega) = \begin{cases} -n(i,3)_1 & \text{, wenn } \omega = \underline{\omega} \in C \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin C \end{cases}$$

Mithilfe von $VarB(1)$ definiert man

$$(SumP_{1,2}^{(i)}|\omega) = \begin{cases} |\omega_1^{(i)}(\underline{n(i,1)})|_b & \text{, wenn } \omega = \underline{\omega} \in C \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin C \end{cases}$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

$SumP_1^{(i)} = SumP_{1,1}^{(i)} \odot SumP_{1,2}^{(i)}$ ist nun ebenfalls rational.

Es gilt:

$$(SumP_1^{(i)}|\omega) = \begin{cases} |\omega_1^{(i)}(\underline{n(i,1)})|_b - n(i,3)_1 & \text{, wenn } \omega = \underline{\omega} \in C \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin C \end{cases}$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Auf dieselbe Art, aber mithilfe von $VarB(-1)$ und $Var1(1)$ definiert man

$$(SumN_1^{(i)}|\omega) = \begin{cases} -|\omega_1^{(i)}(\underline{n(i,1)})|_b + n(i,3)_1 & \text{, wenn } \omega = \underline{\omega} \in C \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin C \end{cases}$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Nun erhält man

$$Sum_1^{(i)} = SumN_1^{(i)} \oplus SumP_1^{(i)} = \min(SumN_1^{(i)}, SumP_1^{(i)})$$

Es gilt

$$(Sum_1^{(i)}|\omega) = \begin{cases} -|\ |\omega_1^{(i)}(\underline{n(i,1)})|_b - n(i,3)_1| & \text{, wenn } \omega = \underline{\omega} \in C \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin C \end{cases}$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Nun bildet man das Hadamard-Produkt über alle $i \in \{1, \dots, p\}$:

$$Sum_1 = Sum_1^{(1)} \odot \dots \odot Sum_1^{(p)}$$

und man erhält die rationale Reihe

$$(Sum_1|\omega) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{p} |\ |\omega_1^{(i)}(\underline{n(i,1)})|_b - n(i,3)_1| & \text{, wenn } \omega = \underline{\omega} \in C \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin C \end{cases}$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Nun erhält man analog mittels $VarA(\epsilon)$, $VarB(\epsilon)$ und $VarY(\alpha)$:

$$(Sum_2|\omega) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{p} \mid |\omega_2^{(i)}(\underline{n(i,2)})|_b - |\omega_3^{(i)}(\underline{n(i,3)})|_a| & \text{, wenn } \omega \in C \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin C \end{cases}$$

und

$$(Sum_3|\omega) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{p} \mid |\omega_3^{(i)}(\underline{n(i,3)})|_b - y_3^{(i)}| & \text{, wenn } \omega = \underline{\omega} \in C \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin C \end{cases}$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

$$(Sum_4|\omega) = \begin{cases} -\sum_{(i,j,k,l)\in V} |X_k^{(i)} - X_l^{(j)}| & \text{, wenn } \omega = \underline{\omega} \in C \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin C \end{cases}$$

Dabei ist

$$X_k^{(1)} = n(k,1)_1 \ , \ X_k^{(2)} = |\omega_1^{(k)}(\underline{n(k,1)})|_a$$

$$X_k^{(3)} = n(k,2)_1 \ , \ X_k^{(4)} = |\omega_2^{(k)}(\underline{n(k,2)})|_a$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Mithilfe von $VarY(\alpha)$ kann man nun auf analoge Weise Sum_5 konstruieren:

$$(Sum_5|\omega) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{p} |p_i y_3^{(i)} - 1| & \text{, wenn } \omega = \underline{\omega} \in C \\ 0 & \text{, wenn } \omega \notin C \end{cases}$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Zum Schluss folgt nun noch Sum_6 mithilfe von $MinMax(\epsilon)$:

$$(Sum_6|\omega) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} (\min_k(n(i,j)_k)_k - \max_k(n(i,j)_k)_k) & , \omega \in C \\ -1 & , \omega \notin C \end{cases}$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

HD mit rationalen Reihen über tropisch Z kodiert:

$$HD = Sum_1 \odot Sum_2 \odot Sum_3 \odot Sum_4 \odot Sum_5 \odot Sum_6$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

HD mit rationalen Reihen über tropisch Z kodiert:

$$HD = Sum_1 \odot Sum_2 \odot Sum_3 \odot Sum_4 \odot Sum_5 \odot Sum_6$$

Wie man sofort sieht, gilt $(HD|\omega) = -1$, wenn $\omega \notin C$. (Sum_6)

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

HD mit rationalen Reihen über tropisch Z kodiert:

$$HD = Sum_1 \odot Sum_2 \odot Sum_3 \odot Sum_4 \odot Sum_5 \odot Sum_6$$

Wie man sofort sieht, gilt $(HD|\omega) = -1$, wenn $\omega \notin C$. (Sum_6)
Ausserdem ist $(HD|\omega)$ immer negativ, wenn $\omega \in C$.

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

HD mit rationalen Reihen über tropisch Z kodiert:

$$HD = Sum_1 \odot Sum_2 \odot Sum_3 \odot Sum_4 \odot Sum_5 \odot Sum_6$$

Wie man sofort sieht, gilt $(HD|\omega) = -1$, wenn $\omega \notin C$. (Sum_6)
Ausserdem ist $(HD|\omega)$ immer negativ, wenn $\omega \in C$.

$$\begin{aligned}\text{Weiterhin } (HD|\omega) \geq 0 &\Longleftrightarrow (HD|\omega) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (Sum_k|\omega) = 0 \;\; \forall k \in \{1, \ldots, 6\} \wedge \omega \in C \\ &\Longleftrightarrow \omega = \omega(\underline{xy})\end{aligned}$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

$$
-\left|\sum_{i=1}^{p} p_i \; y_3^{(i)} - 1\right| - \sum_{i=1}^{p}\left|y_1^{(i)} - x_1^{(i)} \; x_2^{(i)}\right| - \sum_{i=1}^{p}\left|y_2^{(i)} - x_3^{(i)} \; x_4^{(i)}\right|
$$

$$
- \sum_{i=1}^{p}\left|y_3^{(i)} - y_1^{(i)} \; y_2^{(i)}\right| - \sum_{(i,j,k,l)\in V}\left|x_k^{(i)} - x_l^{(j)}\right| = (HD|\omega(\underline{xy}))
$$

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Die diophantische Gleichung HD hat also genau dann eine Lösung in positiven natürlichen Zahlen (ohne 0), wenn $\exists \omega \in A^*$ mit $(HD|\omega) \geq 0$.

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Die diophantische Gleichung HD hat also genau dann eine Lösung in positiven natürlichen Zahlen (ohne 0), wenn $\exists \omega \in A^*$ mit $(HD|\omega) \geq 0$.

Die 0-Reihe ist natürlich rational.

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Die diophantische Gleichung HD hat also genau dann eine Lösung in positiven natürlichen Zahlen (ohne 0), wenn $\exists \omega \in A^*$ mit $(HD|\omega) \geq 0$.

Die 0-Reihe ist natürlich rational.

Also ist LocalIneq im Allgemeinen über tropisch Z nicht entscheidbar.

Unentscheidbarkeit über tropisch Z

Die diophantische Gleichung HD hat also genau dann eine Lösung in positiven natürlichen Zahlen (ohne 0), wenn $\exists \omega \in A^*$ mit $(HD|\omega) \geq 0$.

Die 0-Reihe ist natürlich rational.

Also ist LocalIneq im Allgemeinen über tropisch Z nicht entscheidbar.

Also ist Eq über tropisch Z nicht entscheidbar.

Überblick

Unentscheidbarkeit über dem tropischen Semiring

Nachdem nun mittels des vorher gezeigten die Unentscheidbarkeit des Gleichheitsproblems über tropisch Z gezeigt wurde, reicht es eine Reduktion von tropisch Z auf den tropischen Semiring M anzugeben, um die Unentscheidbarkeit über dem tropischen Semiring zu zeigen.

Unentscheidbarkeit über dem tropischen Semiring

Seien R und S zwei beliebige Z-rationale Potenzreihen über dem Alphabet A.
Nach Schützenberger gibt es also gewichtete Automaten $A_R = (I, \mu, T)$ und $A_S = (J, \nu, F)$, die R bzw. S erkennen.

Unentscheidbarkeit über dem tropischen Semiring

Seien R und S zwei beliebige Z-rationale Potenzreihen über dem Alphabet A.
Nach Schützenberger gibt es also gewichtete Automaten $A_R = (I, \mu, T)$ und $A_S = (J, \nu, F)$, die R bzw. S erkennen.

Nun gibt es für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ neue gewichtete Automaten $A_{R,k}$ und $A_{S,k}$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\mu_k(a) &= (\mu(a)_{i,j} + k)_{1 \leq i,j \leq m} & \qquad \nu_k(a) &= (\nu(a)_{i,j} + k)_{1 \leq i,j \leq n} \\
I(k) &= (I_i + k)_{i=1,\dots,m} & J(k) &= (J_i + k)_{i=1,\dots,n} \\
T(k) &= (T_i + k)_{i=1,\dots,m} & F(k) &= (F_i + k)_{i=1,\dots,n}
\end{aligned}
$$

Unentscheidbarkeit über dem tropischen Semiring

Es gilt nun:
$I(k)\mu_k(\omega)T(k) = I\mu(\omega)T + 2k + k|\omega|$ und
$J(k)\nu_k(\omega)F(k) = J\nu(\omega)F + 2k + k|\omega|$

Somit folgt sofort: $S = T \iff S_k = T_k$

wähle $k > -\min_{i,j}(\mu(a)_{i,j}, \nu(a)_{i,j}, I_i, J_i, T_i, F_i)$

Unentscheidbarkeit über dem tropischen Semiring

Die Entscheidbarkeit des Gleichheitsproblems über dem tropischen Semiring M impliziert also die Entscheidbarkeit des Gleichheitsproblems über tropisch Z.

Somit impliziert die Unentscheidbarkeit des Gleichheitsproblems über tropisch Z die Unentscheidbarkeit des Gleichheitsproblems über dem tropischen Semiring M.

Das Resultat dieser Arbeit war eine Überraschung, da man lange glaubte, dass das Problem entscheidbar wäre.

Das Resultat dieser Arbeit war eine Überraschung, da man lange glaubte, dass das Problem entscheidbar wäre.

Denn im Fall der Wortautomaten gibt es ein Verfahren, das entscheidet ob zwei reguläre Sprachen (Automaten) zusammenfallen.

Das Resultat dieser Arbeit war eine Überraschung, da man lange glaubte, dass das Problem entscheidbar wäre.

Denn im Fall der Wortautomaten gibt es ein Verfahren, das entscheidet ob zwei reguläre Sprachen (Automaten) zusammenfallen.

Wenn das Alphabet einelementig ist, dann ist das Problem auch für Potenzreihen entscheidbar, weil man dieses dann auf das Schnittproblem von C. Choffrut für spezielle rationale Sprachen zurückführt.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.